Planche n° 7. Nombres complexes

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice n° 1 (IT)**

Calculer de deux façons les racines carrées de $1+i$ et en déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Exercice n° 2 (T)**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $z^2+z+1=0$
2) $2z^2+2z+1=0$
3) $z^2-2z\cos\theta+1=0$, θ réel donné.
4) $z^2-(6+i)z+(11+13i)=0$
5) $2z^2-(7+3i)z+(2+4i)=0$.

Exercice n° 3 (IT)** (Une construction du pentagone régulier à la règle et au compas).

1) On pose $z=e^{2i\pi/5}$ puis $a=z+z^4$ et $b=z^2+z^3$. Déterminer une équation du second degré dont les solutions sont a et b et en déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$, $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

2) Le cercle de centre Ω d'affixe $-\frac{1}{2}$ passant par le point M d'affixe i recoupe (Ox) en deux points I et J. Montrer que $x_I+x_J=x_I\times x_J=-1$ et en déduire une construction à la règle et au compas, du pentagone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 1 dont un des sommets est le point d'affixe 1.

3) La diagonale $[AC]$ d'un pentagone régulier $(ABCDE)$ est recoupée par deux autres diagonales en deux points F et G. Calculer les rapports $\frac{AF}{AC}$ et $\frac{FG}{AF}$.

Exercice n° 4 (***)

Soit $\alpha\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ donné. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^3=\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$.

Exercice n° 5 (*I)**

Soient A, B et C trois points du plan, deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b et c. Montrer que :

$$\begin{aligned}(ABC)\text{ équilatéral} &\Leftrightarrow j \text{ ou } j^2 \text{ est racine de l'équation } az^2+bz+c=0\\ &\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc \Leftrightarrow \frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}=0.\end{aligned}$$

Exercice n° 6 (T)**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4-(5-14i)z^2-2(5i+12)=0$.

Exercice n° 7 (I)**

Déterminer les complexes z tels que z, $\frac{1}{z}$ et $z-1$ aient même module.

Exercice n° 8 (IT)**

On note U l'ensemble des nombres complexes de module 1. Montrer que :

$$\forall z\in\mathbb{C},\ (z\in U\setminus\{-1\}\Leftrightarrow \exists x\in\mathbb{R}/\ z=\frac{1+ix}{1-ix}).$$

Exercice n° 9 (IT)**

Forme trigonométrique de $\frac{1+\cos\theta-i\sin\theta}{1-\cos\theta+i\sin\theta}$ et de $\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}$.

Exercice n° 10 (*IT)

Calculer $(1+i\sqrt{3})^9$.

Exercice n° 11 (T)**

Déterminer les racines quatrièmes de i et les racines cubiques de $-\dfrac{8\sqrt{2}}{1+i}$.

Exercice n° 12 (***)

Montrer que les solutions de l'équation $1+z+z^2+...+z^{n-1}-nz^n=0$ sont de module inférieur ou égal à 1.

Exercice n° 13 (T)**

Pour $z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$, on pose $Z=\dfrac{1+z}{1-z}$. Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixes z tels que

1) $|Z|=1$.
2) $|Z|=2$.
3) $Z\in\mathbb{R}$.
4) $Z\in i\mathbb{R}$.

Exercice n° 14 (*T)

Nature et éléments caractéristiques de la transformation d'expression complexe :

1) $z'=z+3-i$
2) $z'=2z+3$
3) $z'=iz+1$
4) $z'=(1-i)z+2+i$

Exercice n° 15 (I)**

On considère l'équation $(E)\ :\ (z-1)^n-(z+1)^n=0$ où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 donné

1) Montrer que les solutions de (E) sont imaginaires pures.
2) Montrer que les solutions de (E) sont deux à deux opposées.
3) Résoudre (E).

Exercice n° 16 (*T)** (ESIM 1993)

Pour $z\in\mathbb{C}$, on pose $\operatorname{ch} z=\dfrac{1}{2}(e^z+e^{-z})$, $\operatorname{sh} z=\dfrac{1}{2}(e^z-e^{-z})$ et $\operatorname{th} z=\dfrac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$.

1) Quels sont les nombres complexes z pour lesquels $\operatorname{th} z$ existe ?
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\operatorname{th} z=0$.
3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système $\left\{\begin{array}{l}|\operatorname{Im} z|<\dfrac{\pi}{2}\\ |\operatorname{th} z|<1\end{array}\right.$.
4) Montrer que la fonction th réalise une bijection de $\Delta=\left\{z\in\mathbb{C}/\ |\operatorname{Im} z|<\dfrac{\pi}{4}\right\}$ sur $U=\{z\in\mathbb{C}/\ |z|<1\}$.

